Equations et problèmes

Vocabulaire :

Une équation est une expression dans laquelle il y a toujours **:**

- **un signe égal ;**
- **une inconnue.**

→ $7x-2=6+5x$ est une équation du premier degré à une inconnue appelée x.

Premier membre de l'équation → $7x-2 = 6+5x$ ← Deuxième membre de l'équation

Résoudre une équation d'inconnue x signifie déterminer la valeur de x qui rend l'équation vraie.

Exemple : Le nombre 4 est solution de l'équation $7x-2=6+5x$.
→ en effet : $7\times 4-2=28-2=26$
$6+5\times 4=6+20=26$

Le nombre 3 n'est pas une solution de l'équation $7x-2=6+5x$.
→ en effet : $7\times 3-2=21-2=19$
$6+5\times 3=6+15=21$

I - Techniques de résolution d'une équation :

Propriété 1 (Règle d'addition/soustraction) :
On peut **ajouter** ou **retrancher** un même nombre **aux deux membres d'une équation**.
→ Soit a, b, k trois nombres ou expressions non nuls :

Si : $a=b$
alors : $a+k=b+k$

Si : $a=b$
alors : $a-k=b-k$

Cette propriété permet de résoudre les équations du type x **+ a = b**.

Exemple : $x+6=11$ on retranche 6 aux deux membres
$x+6\mathbf{-6}=11\mathbf{-6}$ on calcule x
$x=5$

Propriété 2 (Règle de **multiplication/division**) :
On peut **multiplier** ou **diviser** les deux membres d'une équation par **un même nombre non nul**.
→ Soit a, b, k trois nombres ou expressions non nuls :

Si : $a=b$
alors : $a\times k=b\times k$

Si : $a=b$
alors : $\dfrac{a}{k}=\dfrac{b}{k}$

Cette propriété permet de résoudre les équations du type **a ×** x **= b** .

Exemple : $8x=32$ on divise par 8 les deux membres
$\dfrac{8x}{8}=\dfrac{32}{8}$ on calcule x
$x=4$

Exemple : $8a+140=468$ on retranche 140 aux deux membres
$8a+140\mathbf{-140}=468\mathbf{-140}$ on calcule
$8a=328$ on divise par 8 les deux membres
$\dfrac{8a}{8}=\dfrac{328}{8}$ on calcule a
$a=41$

Exemple : **Résoudre l'équation :**

$$5x - 6 = 4 + 3x$$

$5x - 6 - 3x = 4 + 3x - 3x$ → on élimine les termes en x dans le membre de droite

$$2x - 6 = 4$$

$2x - 6 + 6 = 4 + 6$ → on élimine les termes constants dans le membre de gauche

$$2x = 10$$

$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$ → on divise par « le nombre de x » pour « isoler x »

$x = 5$ →**La solution de l'équation est 5**

Vérification : On calcule séparément chaque membre de l'équation pour la valeur $x = 5$ trouvée :

Membre de gauche : $5x - 6 = 5 \times 5 - 6 = 25 - 6 = \mathbf{19}$

Membre de droite $4 + 3x = 4 + 3 \times 5 = 4 + 15 = \mathbf{19}$ → **le résultat est correct.**

II – Résolution de problèmes :

Mettre en équation un problème, c'est traduire son énoncé par une égalité mathématique.

On retiendra deux règles importantes :

- **on déclare comme variable de travail l'objet de l'étude : « soit x ce que l'on cherche »**
- **il ne faut pas hésiter à faire un schéma pour se représenter une situation donnée.**

Exemple : Mathilde pense à un nombre.
Si elle multiplie ce nombre par 6 et retranche 7 au résultat obtenu, elle obtient le même résultat que si elle avait rajouté 3 à ce nombre.
Quel est ce nombre auquel Mathilde pense ?

1) Choix de l'inconnue : Soit x le nombre cherché.

2) Mise en équation : On traduit l'énoncé en des expressions mathématiques :

$$6x - 7 = x + 3$$

3) Résolution de l'équation :

$$6x - 7 - x = x + 3 - x$$
$$5x - 7 = 3$$
$$5x - 7 + 7 = 3 + 7$$
$$5x = 10$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$$
$$x = 2$$

Le nombre cherché est 2.

4) Vérification : $6 \times 2 - 7 = 12 - 7 = 5$

$2 + 3 = 5$

Exemple 2 :
Cinq personnes se partagent 1075 €. Trouver la part de chacune sachant que la seconde a 27 € de plus que la première ; que la troisième a 27 € de plus que la seconde et ainsi de suite jusqu'à la cinquième.

On ne connaît la part d'aucune des personnes. Mais dès qu'on connaît la part d'une personne, on peut trouver la part des autres.

1) Choix de l'inconnue : Il convient de déclarer la (ou les) variable utilisée.

Soit x la part de la première personne.

2) <u>Mise en équation</u> : On traduit l'énoncé en des expressions mathématiques :

- la part de la première personne est : x
- la part de la deuxième personne est: $x + 27$
- la part de la troisième personne est: $x + 27 + 27$ soit $x + 54$
- la part de la quatrième personne est: $x + 54 + 27$ soit $x + 81$
- la part de la cinquième personne est: $x + 81 + 27$ soit $x + 108$

On a donc :

$$\underbrace{part\ de\ la\ 1^{ère}}_{x} + \underbrace{part\ de\ la\ 2^{ème}}_{x\,+\,27} + \underbrace{part\ de\ la\ 3^{ème}}_{x\,+\,54} + \underbrace{part\ de\ la\ 4^{ème}}_{x\,+\,81} + \underbrace{part\ de\ la\ 5^{ème}}_{x\,+\,108} = 1075$$

Soit : $x + x + x + x + x + 27 + 54 + 81 + 108 = 1075$

D'où : $5\,x \quad + \quad 270 \quad = 1075$

3) <u>Résolution de l'équation :</u>

$$5\,x + 270 = 1075$$

$$5\,x + 270 \mathbf{\color{red}{-\ 270}} = 1075 \mathbf{\color{red}{-\ 270}}$$

$$5\,x = 805$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{805}{5}$$

$$x = 161$$

4) <u>Vérification :</u>

Dans l'équation de départ, on remplace x par la valeur trouvée et on compare le résultat à celui attendu :

$5\,x + 270 = 5 \times \mathbf{\color{red}{161}} + 270 = 1075$: le résultat de l'équation est correct.

5) <u>Conclusion :</u>

Les personnes touchent respectivement :

161 € ;
161 + 27 = 188 € ;
188 + 27 = 215 € ;
215 + 27 = 242 € ;
242 + 27 = 269 €.